Analyse und Verifikation

(185.276, VU 2.0, ECTS 3.0)

Übungsblatt 3

Bernhard Urban
Matr.Nr.: 0725771 KNZ: 067 937
lewurm@gmail.com

Thomas Reinbacher
Matr.Nr.: 0828472 KNZ: 786 881
treinbacher@ecs.tuwien.ac.at

05.04.2011

Aufgabe 1:

Wir wählen $\pi :=$ while true do skip od

1. baumartiger Beweis:

$$\dfrac{\dfrac{-}{\{\mathsf{true} \wedge \mathsf{true}\}\ \mathsf{skip}\ \{\mathsf{true}\}}\ [\mathsf{skip}]}{\{\mathsf{true}\}\ \mathsf{while\ true\ do\ skip\ od}\ \{\mathsf{false}\}}\ [\mathsf{while}]$$

2. lineare Beweisskizze:

$$\begin{array}{l}
\{\,1\colon \mathsf{true}\,\} \\
\mathsf{while\ true\ do} \\
\quad \{\,2\colon \mathsf{true} \wedge \mathsf{true}\,\} \\
\quad \dots \\
\quad \{\,4\colon \mathsf{true}\,\} \\
\quad \mathsf{skip} \\
\quad \{\,3\colon \mathsf{true}\,\} \\
\mathsf{od} \\
\{\,5\colon \mathsf{true} \wedge \mathsf{false}\,\} \\
\dots \\
\{\,6\colon \mathsf{false}\,\}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll}
2 \succ 4: & \mathsf{true} \wedge \mathsf{true} & \succ & \mathsf{true} & \checkmark \\
5 \succ 6: & \mathsf{true} \wedge \mathsf{false} & \succ & \mathsf{false} & \\
 & \mathsf{false} & \succ & \mathsf{false} & \checkmark
\end{array}$$

Aufgabe 2:

Unter der Annahme von:

$$\begin{aligned} p :=&\ \alpha = 0 \\ t :=&\ 1 \\ x :=&\ \alpha \end{aligned}$$

kann gezeigt werden, dass die quantorenfreie Realisierung der Vorwärtszuweisung nicht korrekt ist und einen falschen Schluss zulässt:

$$\begin{array}{ccc} \{p\} & x := t & \{p[t/x]\} \\ \{\alpha = 0\} & \alpha := 1 & \{p[1/\alpha]\} \\ \{\alpha = 0\} & \alpha := 1 & \underbrace{\{1 = 0\}}_{\text{Widerspruch}} \end{array}$$

Aufgabe 3:

1. Träumen der Invariante:

$$Inv = \quad (n - x + 1) * m = y \quad \wedge \quad x \leq n$$

2. Anwendung der [while] Regel:

$$\begin{aligned} &\{\, 1\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \wedge x \neq 1 \,\} \\ &y := y + m; \\ &x := x - 1; \\ &\{\, 2\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \,\} \end{aligned}$$

3. Anwendung der [while] Regel:

$$\begin{aligned} &\{\, 6\colon x = n \wedge y = m \,\} \\ &\ldots \\ &\{\, Inv\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \,\} \\ &\textsf{while } x \neq 1 \textsf{ do} \\ &\quad \{\, 1\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \wedge x \neq 1 \,\} \\ &\quad y := y + m; \\ &\quad x := x - 1; \\ &\quad \{\, 2\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \,\} \\ &\textsf{od} \qquad [\textsf{while}] \\ &\{\, 4\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \wedge \neg(x \neq 1) \,\} \\ &\ldots \\ &\{\, 5\colon y = n * m \,\} \end{aligned}$$

4. Detaillierte Behandlung des Rumpfs der [while] Schleife:

$\{\,1\colon (n-x+1)*m = y \wedge x \leq n \wedge x \neq 1\,\}$
$\ldots$
$\{\,7\colon (n-(x-1)+1)*m = y+m \wedge (x-1) \leq n\,\}$
$y := y+m;$ [ass]
$\{\,8\colon (n-(x-1)+1)*m = y \wedge (x-1) \leq n\,\}$
$x := x-1;$ [ass]
$\{\,2\colon (n-x+1)*m = y \wedge x \leq n\,\}$

5. Schluss der Beweislücke $1 \succ 5$ ([cons]):

$$\begin{aligned}
(n-x+2)*m &= y+m \\
nm - xm + 2m &= y+m \\
nm - xm + m &= y \\
nm - xm + ml &= y \\
(n-x+1)*m &= y \quad \checkmark
\end{aligned}$$

sowie:

$$(x \leq n \wedge x \neq 1) \succ (x-1) \leq n \quad \checkmark$$

6. Anwendung der [while] Regel liefert:

$\{\,6\colon x = n \wedge y = m\,\}$
$\ldots$
$\{\,Inv\colon (n-x+1)*m = y \wedge x \leq n\,\}$
while $x \neq 1$ do
  $\{\,1\colon (n-x+1)*m = y \wedge x \leq n \wedge x \neq 1\,\}$
  $\Downarrow$ [cons]
  $\{\,7\colon (n-x+2)*m = y+m \wedge (x-1) \leq n\,\}$
  $y := y+m;$ [ass]
  $\{\,8\colon (n-(x-1)+1)*m = y \wedge (x-1) \leq n\,\}$
  $x := x-1;$ [ass]
  $\{\,2\colon (n-x+1)*m = y \wedge x \leq n\,\}$
od [while]
$\{\,4\colon (n-x+1)*m = y \wedge x \leq n \wedge \neg(x \neq 1)\,\}$
$\ldots$
$\{\,5\colon y = n*m\,\}$

7. Schluss der Beweislücke zur Nachbedingung $4 \succ 5$:

$$\begin{aligned}
(n-x+1)*m = y \wedge x \leq n \wedge \neg(x \neq 1) &\succ y = n*m \\
(n-x+1)*m = y \wedge x \leq n \wedge (x = 1) &\succ y = n*m \\
(n-1+1)*m = y &\succ y = n*m \quad \checkmark
\end{aligned}$$

8. Schluss der Beweislücke zur Vorbedingung $6 \succ Inv$:

$$x = n \succ x \leq n \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned} &x = n \wedge y = m \succ (n - x + 1) * m = y \\ &x = n \wedge y = m \succ (n - (x = n) + 1) * m = y \\ &x = n \wedge y = m \succ 1 * m = y \quad \checkmark \end{aligned}$$

<u>Aufgabe 4</u>:

Terminierungsterm: $t \equiv x$

$$\begin{array}{l}
[\,6\colon x = n \wedge y = m \wedge n > 1\,] \\
\ldots \\
[\,Inv\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n\,] \\
\textsf{while } x \neq 1 \textsf{ do} \\
\quad [\,1\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \wedge x \neq 1 \wedge x = w\,] \\
\quad \ldots \\
\quad [\,7\colon (n - x + 2) * m = y + m \wedge (x - 1) \leq n \wedge (x - 1) < w\,] \\
\quad y := y + m; \qquad \textsf{[ass]} \\
\quad [\,8\colon (n - (x - 1) + 1) * m = y \wedge (x - 1) \leq n \wedge (x - 1) < w\,] \\
\quad x := x - 1; \qquad \textsf{[ass]} \\
\quad [\,2\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \wedge x < w\,] \\
\textsf{od} \qquad \textsf{[while]}'_{TK} \\
[\,4\colon (n - x + 1) * m = y \wedge x \leq n \wedge \neg(x \neq 1)\,] \\
\ldots \\
[\,5\colon y = n * m\,]
\end{array}$$

1. Schluss der Beweislücke zur Vorbedingung $6 \succ Inv$:

$$x = n \wedge y = m \succ (n - x + 1) * m = y \quad \checkmark \quad \text{bereits gezeigt}$$

$$x = n \wedge n > 1 \succ x \leq n \quad \checkmark$$

2. Schluss der Beweislücke zur Vorbedingung $1 \succ 7$:

$$(n - x + 1) * m = y \succ (n - x + 2) * m = y + m \quad \checkmark \quad \text{bereits gezeigt}$$

$$x \leq n \wedge x \neq 1 \succ (x - 1) \leq n \quad \checkmark \quad \text{bereits gezeigt}$$

$$x = w \succ (x - 1) < w \quad \checkmark$$

3. Schluss der Beweislücke zur Vorbedingung $4 \succ 5$: Analog zum partiellen Fall.