Analyse und Verifikation

(185.276, VU 2.0, ECTS 3.0)

Übungsblatt 2

Bernhard Urban

Matr.Nr.: 0725771 KNZ: 067 937

lewurm@gmail.com

05.04.2011

Aufgabe 1:

- **Fall 1**: Sei $b \equiv \mathsf{true},\ \mathsf{true} \in \mathbb{B}$, dann

$$[\![b]\!]_B(\sigma) = [\![\mathsf{true}]\!]_B(\sigma) = \mathsf{true} = [\![\mathsf{true}]\!]_B(\sigma') = [\![b]\!]_B(\sigma')$$

  Analog für false. (*Induktionsanfang*)

- **Fall 2**: Sei $b \equiv \neg b_1,\ b_1 \in \mathbf{Bexpr}$, dann

$$\begin{aligned} & [\![b]\!]_B(\sigma) \\ = \quad & [\![\neg b_1]\!]_B(\sigma) \\ = \quad & neg([\![b_1]\!]_B(\sigma)) \\ = \quad & neg([\![b_1]\!]_B(\sigma')) \qquad \text{(Hypothese für } b_1\text{)} \\ = \quad & [\![\neg b_1]\!]_B(\sigma') \\ = \quad & [\![b]\!]_B(\sigma') \end{aligned}$$

- **Fall 3**: Sei $b \equiv b_1 \wedge b_2,\ b_1, b_2 \in \mathbf{Bexpr}$, dann

$$\begin{array}{rl} & [\![b]\!]_B(\sigma) \\ = & [\![b_1 \wedge b_2]\!]_B(\sigma) \\ = & \mathit{conj}\ ([\![b_1]\!]_B(\sigma), [\![b_2]\!]_B(\sigma)) \\ = & \mathit{conj}\ ([\![b_1]\!]_B(\sigma'), [\![b_2]\!]_B(\sigma')) \\ = & [\![b_1 \wedge b_2]\!]_B(\sigma') \\ = & [\![b]\!]_B(\sigma') \end{array}$$

  Analog für $\vee$.

- **Fall 4**: Sei $b \equiv a_1 = a_2,\ a_1, a_2 \in \mathbf{Aexpr}$, dann

$$\begin{array}{rl} & [\![b]\!]_B(\sigma) \\ = & [\![a_1 = a_2]\!]_B(\sigma) \\ = & \mathit{equal}([\![a_1]\!]_A(\sigma), [\![a_2]\!]_A(\sigma)) \\ = & \mathit{equal}([\![a_1]\!]_A(\sigma'), [\![a_2]\!]_A(\sigma')) \\ = & [\![a_1 = a_2]\!]_B(\sigma') \\ = & [\![b]\!]_B(\sigma') \end{array}$$

  Analog für $<$, $\leq$, etc.

Bedeutung: Bestehen zwei Zustände σ und σ' aus den selben Wertzuweisungen für deren freien Variablen, so führt die Auswertung eines Ausdrucks b unter σ bzw. σ' zum selben Ergebnis.

Aufgabe 2:

Strukturell Operationelle Semantik

$$\begin{array}{lll} \langle \pi_1; (\pi_2; \pi_3), \sigma \rangle & & \\ \Rightarrow & \langle \pi_2; \pi_3, \langle \pi_1, \sigma \rangle \rangle & \\ \Rightarrow & \langle \pi_3, \langle \pi_2, \langle \pi_1, \sigma \rangle \rangle \rangle & \\ \Rightarrow & \langle \pi_3, \langle \pi_1; \pi_2, \sigma \rangle \rangle & \text{folgt aus } \langle p; q, \sigma \rangle = \langle q, \langle p, \sigma \rangle \rangle \\ \Rightarrow & \langle (\pi_1; \pi_2); \pi_3, \sigma \rangle & \end{array}$$

Annahme: $\langle \pi_1, \sigma \rangle$ und $\langle \pi_2, \langle \pi_1, \sigma \rangle \rangle$ bzw. $\langle \pi_1;\ \pi_2, \sigma \rangle$ terminieren regulär.

Natürliche Semantik
$\langle \pi_1; (\pi_2; \pi_3), \sigma\rangle$:

$$\dfrac{\langle \pi_1, \sigma\rangle \to \sigma' \qquad \dfrac{\langle \pi_2, \sigma'\rangle \to \sigma'' \quad \langle \pi_3, \sigma''\rangle \to \sigma'''}{\langle \pi_2; \pi_3, \sigma'\rangle \to \sigma'''}\,[\mathrm{comp}_{ns}]}{\langle \pi_1; (\pi_2; \pi_3), \sigma\rangle \to \sigma'''}\,[\mathrm{comp}_{ns}]$$

$\langle (\pi_1; \pi_2); \pi_3, \sigma\rangle$:

$$\dfrac{\dfrac{\langle \pi_1, \sigma\rangle \to \sigma' \quad \langle \pi_2, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \pi_1; \pi_2, \sigma\rangle \to \sigma''}\,[\mathrm{comp}_{ns}] \qquad \langle \pi_1, \sigma''\rangle \to \sigma'''}{\langle (\pi_1; \pi_2); \pi_3, \sigma\rangle \to \sigma'''}\,[\mathrm{comp}_{ns}]$$

Aufgabe 3:

Strukturell Operationelle Semantik
Sei

- $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = 13$ und $\sigma(y) = 5$
- $\pi \in \mathbf{Prg}$ mit

$$\pi \equiv z := 0;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}$$

$\langle z := 0;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma\rangle$
$\Rightarrow \langle \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma[0/z]\rangle$
$\Rightarrow \langle \mathsf{if}\ y \leq x\ \mathsf{then}\ z := z + 1;\ x := x - y;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}\ \mathsf{else}$ $\mathsf{skip}\ \mathsf{fi}, \sigma[0/z]\rangle$
$\Rightarrow \langle z := z + 1;\ x := x - y;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma[0/z]\rangle$
$\Rightarrow \langle x := x - y;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma[1/z]\rangle$
$\Rightarrow \langle \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, (\sigma[1/z])[8/x]\rangle$
$\Rightarrow \langle \mathsf{if}\ y \leq x\ \mathsf{then}\ z := z + 1;\ x := x - y;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}\ \mathsf{else}$ $\mathsf{skip}\ \mathsf{fi}, (\sigma[1/z]\rangle)[8/x]$
$\Rightarrow \langle z := z + 1;\ x := x - y;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, (\sigma[1/z])[8/x]\rangle$
$\Rightarrow \langle x := x - y;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, (\sigma[8/x])[2/z]\rangle$
$\Rightarrow \langle \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, (\sigma[2/z])[3/x]\rangle$
$\Rightarrow \langle \mathsf{if}\ y \leq x\ \mathsf{then}\ z := z + 1;\ x := x - y;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}\ \mathsf{else}$ $\mathsf{skip}\ \mathsf{fi}, (\sigma[2/z])[3/x]\rangle$
$\Rightarrow \langle \mathsf{skip}, (\sigma[2/z])[3/x]\rangle$
$\Rightarrow (\sigma[2/z])[3/x]$

Natürliche Semantik
Sei $\sigma \in \Sigma$ mit $\sigma(x) = 13$ und $\sigma(y) = 5$, dann gilt:

$$\langle z := 0;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}\rangle \to \sigma[2/z][5/y][3/x]$$

$$\dfrac{—}{V = \langle \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma[2/z][3/x]\rangle \to \sigma[2/z][5/y][3/x]}\ \text{while}_{ns}^{ff}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{—}{\langle z := z + 1, \sigma[1/z][8/z]\rangle \to \sigma[2/z][8/x]}\ \text{ass}_{ns} \quad \dfrac{—}{\langle x := x - y, \sigma[2/z][8/z]\rangle \to \sigma[2/z][3/x]}\ \text{ass}_{ns}}{\langle z := z + 1;\ x := x - y, \sigma[1/z][8/x]\rangle \to \sigma[2/z][3/x]}\ \text{comp}_{ns} \quad V}{T = \langle \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma[1/z][8/x]\rangle \to \sigma[2/z][5/y][3/x]}\ \text{while}_{ns}^{tt}$$

$$\dfrac{\dfrac{—}{\langle z := 0, \sigma\rangle \to \sigma[0/z]}\ \text{ass}_{ns} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{—}{\langle z := z + 1, \sigma[0/z]\rangle \to \sigma[1/z]}\ \text{ass}_{ns} \quad \dfrac{—}{\langle x := x - y, \sigma[1/z]\rangle \to \sigma[1/z][8/x]}\ \text{ass}_{ns}}{\langle z := z + 1;\ x := x - y, \sigma[0/z]\rangle \to \sigma[1/z][8/x]}\ \text{comp}_{ns} \quad T}{\langle \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma[0/z]\rangle \to \sigma[2/z][5/y][3/x]}\ \text{while}_{ns}^{tt}}{\langle z := 0;\ \mathsf{while}\ y \leq x\ \mathsf{do}\ z := z + 1;\ x := x - y\ \mathsf{od}, \sigma\rangle \to \sigma[2/z][5/y][3/x]}\ \text{comp}_{ns}$$

Aufgabe 4:

Seien $\pi_1, \pi_2 \in$ **Prg** und $\sigma, \sigma' \in \Sigma$.
Es ist folgende Implikation auf Gültigkeit zu untersuchen:

$$\langle \pi_1;\ \pi_2, \sigma\rangle \Rightarrow^* \langle \pi_2, \sigma'\rangle \succ \exists k \in \mathbb{N}_0.\ \langle \pi_1, \sigma\rangle \Rightarrow^k \sigma'$$

Gegenbeispiel
Annahmen:

- Für σ gilt $\sigma(x) = 0$
- π_1 ist ein regulär terminierendes Programm
- $\pi_2 \equiv \mathsf{while\ true\ do}\ x := x + 1\ \mathsf{od}$

Nachdem π_2 offensichtlich divergiert, dabei auch den Zustand verändert und wiederkehrend die Form π_2 annimmt, kann σ' der linken Seite der Implikation ungleich σ' der rechten Seite sein, da die Anzahl der Ableitungsschritte durch $\Rightarrow^*$ nicht eingeschränkt ist. Veranschaulicht:

$$\langle \pi_1;\ \pi_2, \sigma\rangle \Rightarrow^* \langle \pi_2, \sigma'\rangle \Rightarrow^* \langle \pi_2, \sigma''\rangle \Rightarrow^* \ldots \Rightarrow^* \langle \pi_2, \sigma^{(n)}\rangle$$

kann zu

$$\langle \pi_1;\ \pi_2, \sigma\rangle \Rightarrow^* \langle \pi_2, \sigma^{(n)}\rangle$$

zusammengefasst werden und entspricht somit nicht mehr dem Zustand der rechten Seite. Daraus folgt, dass die Implikation falsch ist.

Aufgabe 5:

Strukturell Operationelle Semantik

$$\frac{\text{—}}{\langle \mathsf{repeat}\ \pi\ \mathsf{until}\ \mathsf{b}\ \mathsf{end}, \sigma\rangle \Rightarrow \langle \pi;\ \mathsf{if}\ \neg\mathsf{b}\ \mathsf{then}\ \mathsf{repeat}\ \pi\ \mathsf{until}\ \mathsf{b}\ \mathsf{end}\ \mathsf{else}\ \mathsf{skip}\ \mathsf{fi}, \sigma\rangle}\ \mathrm{rep}_{sos}$$

Natürliche Semantik

$$\frac{\langle \pi, \sigma\rangle \to \sigma' \quad \langle \mathsf{repeat}\ \pi\ \mathsf{until}\ \mathsf{b}\ \mathsf{end}, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \mathsf{repeat}\ \pi\ \mathsf{until}\ \mathsf{b}\ \mathsf{end}, \sigma\rangle \to \sigma''}\ \mathrm{rep}_{ns}^{ff} \qquad [\![b]\!]_B(\sigma') = \mathsf{false}$$

$$\frac{\langle \pi, \sigma\rangle \to \sigma'}{\langle \mathsf{repeat}\ \pi\ \mathsf{until}\ \mathsf{b}\ \mathsf{end}, \sigma\rangle \to \sigma'}\ \mathrm{rep}_{ns}^{tt} \qquad [\![b]\!]_B(\sigma') = \mathsf{true}$$

Aufgabe 6:

Strukturell Operationelle Semantik

$$\frac{\text{—}}{\langle \mathsf{for}\ x := a_1\ \mathsf{to}\ a_2\ \mathsf{do}\ \pi\ \mathsf{od}, \sigma\rangle \Rightarrow \langle x := a_1;\ \mathsf{while}\ x < a_2\ \mathsf{do}\ \pi;\ x := x + 1\ \mathsf{od}, \sigma\rangle}\ \mathrm{for}_{sos}$$

Natürliche Semantik

$$\frac{\langle x := a_1, \sigma\rangle \to \sigma' \quad \langle \mathsf{while}\ x < a_2\ \mathsf{do}\ \pi;\ x := x + 1\ \mathsf{od}, \sigma'\rangle \to \sigma''}{\langle \mathsf{for}\ x := a_1\ \mathsf{to}\ a_2\ \mathsf{do}\ \pi\ \mathsf{od}, \sigma\rangle \to \sigma''}\ \mathrm{for}_{ns}$$